DURÉE : 4 heures

E.N.S.E.T. Section A'_1

On désigne par :

N l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2, ... ;

C l'ensemble des nombres complexes;

E le **C**-espace vectoriel formé des suites de nombres complexes (on rappelle que si $X = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont dans E et si $\lambda \in \mathbf{C}$, on a $X + Y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $\lambda X = (\lambda x_n)_{n \in \mathbf{N}}$).

On note F la partie de E formée des suites $X = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ converge ($|x_n|$ désigne le module du nombre complexe x_n).

NOTA. — *Les parties* II *et* III *du problème sont indépendantes. Seul le résultat du* I. 2° *a est intéressant pour les parties* II *et* III *du problème.*

I

1° Montrer que si $X = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont dans F, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ est convergente (on désigne par $\bar{y}_n$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe y_n).

2° *a.* Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que l'application de $F \times F$ dans **C** qui à $(X, Y) \in F \times F$ associe le nombre complexe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ est un produit scalaire hermitien sur F (on a posé $X = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$). On notera $X.Y$ ce produit scalaire et par $\| X \| = \sqrt{X.X}$ la norme associée.

3° Soit $(X_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de F pour la norme définie au 2° *b* ci-dessus. On pose $X_p = (x_{n,p})_{n \in \mathbf{N}}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.

a. Montrer que les suites $(x_{n,p})_{p \in \mathbf{N}}$ sont, pour tout n fixé dans **N**, convergentes; on pose alors $y_n = \lim_{p \to +\infty} x_{n,p}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

b. Montrer que Y est dans F et que $\lim_{p \to +\infty} X_p = Y$.

II

On donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres complexes et on définit une application u de E dans E en associant à la suite $X = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la suite $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $y_n = a_n x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1° Montrer que u est une application linéaire de E dans E.

2° *a.* Montrer que si la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, la restriction u_F de u à F est une application linéaire de F dans F.

b. Montrer que si la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est non bornée, on peut en extraire une suite $(a_{n_p})_{p \in \mathbf{N}}$ telle que $|a_{n_p}| \geqslant p$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.

c. Déduire de ce qui précède que la restriction u_F de u à F est une application linéaire de F dans F si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

3° On suppose la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ bornée.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u_F. On désigne alors par A l'ensemble des valeurs propres.

b. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on considère l'application linéaire u_λ de E dans E définie par $u_\lambda(X) = u(X) - \lambda X$ pour tout $X \in E$.

i. Montrer que la restriction $u_{\lambda,F}$ de u_λ à F est une application linéaire de F dans F.

ii. On désigne, par B′ l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $u_{\lambda,F}$ soit une bijection de F sur F, par B le complémentaire dans **C** de B′.

α. Montrer que $B \supset A$.

β. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \notin A$; dire si la suite $\left(\frac{1}{a_n - \lambda}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée ou non bornée (on examinera le cas où λ appartient à l'adhérence $\bar{A}$ de A et le cas où λ n'appartient pas à $\bar{A}$).

γ. Conclure, en utilisant ce qui précède, que $B = \bar{A}$.

4° Soit K une partie fermée bornée de **C**. Montrer que l'on peut choisir la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de **C** de telle sorte que l'ensemble B défini au 3° *b. ii* soit exactement l'ensemble K.

III

Soient α et β deux nombres complexes donnés, $\beta \neq 0$. On définit une application v de E dans E en associant à la suite $X = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $y_n = \alpha x_n - \beta x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1° Montrer que la restriction v_F de v à F est une application linéaire de F dans F.

2° On désigne par G l'ensemble des valeurs propres de v_F ; déterminer G.

3° Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on considère l'application linéaire v_λ de E dans E définie par $v_\lambda(X) = v(X) - \lambda X$ pour tout $X \in E$.

i. Montrer que la restriction $v_{\lambda,F}$ de v_λ à F est une application linéaire de F dans F.

ii. On désigne par H′ l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $v_{\lambda,F}$ soit une bijection de F sur F, par H le complémentaire dans **C** de H′.

α. Montrer que $H \supset G$.

β. On suppose H′ non vide. Soit $\lambda \in H'$ et $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un élément quelconque de F, on désigne par $X = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la solution unique de l'équation $v_{\lambda,F}(X) = Y$ et on pose $\theta = \frac{\beta}{\alpha - \lambda}$. Montrer successivement que

1. $$x_p - \theta^n x_{n+p} = \frac{1}{\alpha - \lambda} \sum_{q=0}^{n-1} \theta^q y_{p+q}$$

pour tout $p \in \mathbf{N}$, tout $n \in \mathbf{N}$.

2. $$|\theta| < 1$$

3. $$x_p = \frac{1}{\alpha - \lambda} \sum_{q=0}^{+\infty} \theta^q y_{p+q}$$

pour tout $p \geqslant 0$.

γ. Soient $Y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donné dans F et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\theta| < 1$.

1. Vérifier que l'on définit un $X \in E$, $X = (x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ en posant

$$x_p = \frac{1}{\alpha - \lambda} \sum_{q=0}^{+\infty} \theta^q y_{p+q}$$

pour tout $p \in \mathbf{N}$ et que $v_\lambda(X) = Y$.

2. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} x_p = 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$

3. On pose

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} |x_p|^2, \qquad S_n = \sum_{p=0}^{n} |y_p|^2.$$

Montrer que

$$|\alpha - \lambda|^2 s_n + |\beta|^2 (s_n - |x_0|^2 + |x_{n+1}|^2) - 2 \sum_{p=0}^{n} \mathcal{R}_e\left[(\alpha - \lambda)\bar{\beta}\, x_p \overline{x_{p+1}}\right] = S_n$$

(on a désigné par $\mathcal{R}_e(z)$ la partie réelle du nombre complexe z), puis établir l'inégalité $(|\alpha - \lambda| - |\beta|)^2 s_n \leqslant S_n + \varepsilon_n$, où $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite bornée de nombres réels que l'on précisera.

δ. Déterminer, en utilisant ce qui précède, l'ensemble H.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail